BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2006

ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНЫХ И ДРОБНО МАКСИМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ АССОЦИРОВАННЫХ ОБОБЩЕННЫМ СДВИГОМ

Н.Р.КАРАМАЛИЕВ
Бакинский Государственный Университет

В работе для максимальных и дробно максимальных функций, порожденных обобщенным сдвигом (ОС), ассоциированным с дифференциальным оператором Лапласа – Бесселя, устанавливаются весовые L_p - оценки. Весовые функции произвольные положительные функции, удовлетворяющие довольно естественно условиям.

Пусть

$R_m^+ = \left\{ \left(x_1,...,x_m \right) \in R^m : x_m > 0 \right\}$, $T^s u(x) = C_\nu \int_0^\pi u\left(x_1 - y_1,...,x_{m-1} - y_{m-1}, \sqrt{x_m^2 - 2x_m s_m \cos\alpha + s_m^2} \right)$

$\times \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha \ \left(\nu > 0, C_\nu - постоянное \right)$ оператор обобщенного сдвига (ООС [1]) порожденный оператором Лапласа – Бесселя ([1]),

$$L_{p,\nu}(\omega) = \left\{ u : \left\| u : L_{p,\nu}(\omega) \right\| \overset{df}{=} \left(\int_{R_m^+} \left| u(x)\omega(x) \right|^p x_m^\gamma dx \right)^{1/p} < +\infty \right\}, \quad L_{p,\nu} \overset{df}{=} L_{p,\nu} \qquad \textbf{(1)}$$

B максимальные функции. Рассматривается B максимальная функция определенная следующим образом

$$M_B f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \left| B_+(0,\varepsilon) \right|_\nu^{-1} \int_{B_+(0,\varepsilon)} T^y \left| f(x) \right| y_m^\nu dy$$

Здесь $B_+(0,\varepsilon) = \left\{ y \in R_m^+ : |y| < \varepsilon \right\}$, $\left| E \right|_\nu = \int_E x_m^\nu dx$, $E \subset R_m^+$.

Для B максимальной функции справедлива следующая

Теорема.1. Если $f \in L_{p,\nu}$, $1 < p \le \infty$, то $M_B f(x) \in L_{p,\nu}$ и

$$\left\|M_B f(\cdot)\right\|_{p,\nu} \le C_{p,\nu} \left\|f(\cdot)\right\|_{p,\nu}$$

где $C_{p,\nu}$ - зависит только от p и ν и размерности m.

Для доказательства теоремы рассматривается максимальная функция по мере $M_\mu f(x)$ которая определяется следующим образом :

$$M_\mu f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \left(\mu\left(B(x,\varepsilon)\right)^{-1} \int\limits_{B_+(x,\varepsilon)} |f(y)| d\mu(y) \right),$$

где

$$d\mu(x) = x_m^\nu dx, \quad \mu\left(B(x,\varepsilon)\right) = \int\limits_{B_+(x,\varepsilon)} x_m^\nu dx = \left|B_+(x,\varepsilon)\right|_\nu \quad .$$

Доказывается, что

$$M_B f(x) \le C M_\mu f(x).$$

Известно, что для мер μ удовлетворяющих условию удвоения

$$\int\limits_{B(x,2\varepsilon)} d\mu(y) \le C \int\limits_{B(x,\varepsilon)} d\mu(y)$$

справедлива оценка

$$\int\limits_{R^m} \left(M_\mu f(x)\right)^p d\mu(x) \le C_{p,\nu} \int\limits_{R^m} |f(x)|^p d\mu(x)$$

Тогда учитывая, что для мер $d\mu(x) = x_m^\nu dx$ верно условие удвоения имеем

$$\left\|M_B f\right\|_{p,\nu} \le C \left\|M_\mu f\right\|_{p,\nu} \le C_{p,\nu} \left\|f\right\|_{p,\nu}.$$

Интеграл Пуассона. Ядро Пуассона, порожденное преобразованием Фурье – Бесселя определяется равенством

$$P_{\nu,m}(x,t) = C_m t(t^2 + |x|^2)^{-\frac{m+\gamma+1}{2}}.$$

Интеграл Пуассона, ассоциированный с оператором

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\nu}{x_m}\frac{\partial}{\partial x_m}$$

определяется следующим образом

$$U_{\gamma,m}(x,t) = \left(P_{\nu,m}(x,t) * f\right)_{\gamma,m}(x) = \int\limits_{R_m^+} P_{\nu,m}(y,t) T^y f(x) y_m^\nu dy.$$

Известно ([2]), что $U_{\nu,m}(x,t)$ является решением следующей задачи

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{m-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} + \frac{\gamma}{x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \right) U_{\gamma,m}(x,t) = 0, \qquad x \in R_m^+, t > 0, \\ U_{\gamma,m}(x,t) = f(x), \ t = 0 . \end{cases}$$

Для дальнейших рассуждений доказывается

Лемма. Пусть $f \in L_{1,\nu}^{loc}(R_m^+)$ и $f \geq 0$, тогда существует постоянная $C_\gamma > 0$, не зависящая от функции f такая, что для любого $x \in R_m^+$ справедливо неравенство

$$M_B f(x) \leq C_\gamma \sup_{t>0} \{ U_{\gamma,m}(x,t) \} \tag{1}$$

Доказательство проводится аналогично ([3]).Фиксируем $r > 0$, тогда

$$\sup_{t>0} \left(U_{\nu,m}(x,t) \right) \geq U_{\nu,m}(x,r) = \int\limits_{R_m^+} P_{r,\gamma}(y) T^y f(x) y_m^\nu dy \geq$$

$$\geq C \int\limits_{|y| \leq 2r} r \left(r^2 + |y|^2 \right)^{-\frac{m+\gamma+1}{2}} T^y f(x) y_m^\gamma dy \geq$$

$$\geq C_5^{-\frac{m+\gamma+1}{2}} r^{-m-\gamma} \int\limits_{|y| \leq 2r} T^y f(x) y_m^\gamma dy =$$

$$= C_5^{-\frac{m+\gamma+1}{2}} 2^{-m-\gamma} \frac{C_{1,\nu}}{|B_+(0,2r)|_\gamma} \int\limits_{B_+(0,2r)} T^y f(x) y_m^\gamma dy =$$

$$= C_{2,\gamma} \frac{C_{1,\nu}}{|B_+(0,2r)|_\gamma} \int\limits_{B_+(0,2r)} T^y f(x) y_m^\gamma dy .$$

Отсюда следует доказательство леммы.

В дробно максимальная функция. Определим В дробно максимальную функцию следующим образом

$$M_B^\alpha f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |B_+(0,\varepsilon)|_\gamma^{\frac{\alpha}{m+\gamma} - 1} \int\limits_{B_+(0,\varepsilon)} T^y f(x) y_m^\nu dy ,$$

здесь $0 < \alpha < n + \gamma$.

Теорема.2. Пусть $0<\alpha<n+\gamma$, $1<p<q$, $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{\alpha}{n+\gamma}$,

$f\in L_{p,\nu}(R_m^+)$, то $M_B^\alpha f\in L_{q,\nu}(R_m^+)$ и

$$\left(\int_{R_m^+}\left(M_B^\alpha f(x)\right)^q x_m^\nu dx\right)^{\frac{1}{q}}\le C\left(\int_{R_m^+}|f(x)|^p x_m^\nu dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

где постоянная C не зависит от f.

Доказательство. Известно, что $M_B^\alpha f(x)\le CM_\mu^\alpha f(x)$. Здесь $M_\mu^\alpha f(x)$ дробно максимальная функция по мере μ и определяется следующим образом.

$$M_\mu^\alpha f(x)=\sup_{t>0}\mu\left|B(x,\varepsilon)\right|^{\frac{\alpha}{n+\gamma}-1}\int_{B(x,\varepsilon)}f(y)d\mu(y),$$

где $\mu\left(B(x,\varepsilon)\right)=\int_{B(x,\varepsilon)}x_m^\nu dx=\left|B(x,\varepsilon)\right|_\gamma$, $d\mu(x)=x_m^\nu dx$.

Для мер μ удовлетворяющих условию удвоения известно, что

$$\left(\int_{R_m^+}\left(M_\mu^\alpha f(x)\right)^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}\le C_{p,\mu}\left(\int_{R_m^+}|f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Поэтому, учитывая, что для мер $d\mu(x)=x_m^\nu dx$ верно условие удвоения получаем доказательство теоремы.

Потенциал Рисса. Введем B – потенциал Рисса

$$I_B^\alpha f(x)=\int_{R_m^+}T^y|x|^{\alpha-n-\gamma}f(y)y_m^\nu dy\ ,\quad 0<\alpha<n+\gamma.$$

Известно, что если $1\le p<\dfrac{n+\gamma}{\alpha}$, то B – потенциал Рисса $I_B^\alpha f$ определен для всех функций $f\in L_{p,\gamma}(R_m^+)$.

Справедлива

Лемма. Пусть $0<\alpha<n+\gamma$, $1<p<q<\infty$, $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{\alpha}{n+\gamma}$. Если $f\in L_{1,\gamma}^{loc}(R_m^+)$, то

и имеет место оценка

$$M_B^{\alpha} f(x) \le I_B^{\alpha} \left| f(x) \right| .$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Отметим, что

$$\left| B_+(0,\varepsilon) \right|_{\gamma} = \int_{B_+(0,\varepsilon)} x_m^{\nu} dx = \int_{S_m^+} \int_0^{\varepsilon} t^{m-1+\gamma} \xi_m^{\gamma} dt d\xi = C\varepsilon^{m+\gamma} .$$

С учетом этого, имеем

$$I_B^{\alpha} \left| f(x) \right| = \int_{R_m^+} \frac{1}{\left| x-y \right|^{m+\gamma-\alpha}} T^y \left| f(x) \right| dy \ge \int_{B_+(0,\varepsilon)} \frac{1}{\left| x-y \right|^{m+\gamma-\alpha}} T^y \left| f(x) \right| y_m^{\gamma} dy \ge$$

$$\ge \frac{1}{\varepsilon^{m+\gamma-\alpha}} \int_{B_+(0,\varepsilon)} T^y \left| f(x) \right| dx = C \left| B_+(0,\varepsilon) \right|^{\frac{\alpha}{m+\gamma}-1} \int_{B_+(0,\varepsilon)} T^y \left| f(x) \right| y_m^{\gamma} dy \cdot$$

Мы получили, что для любого $\varepsilon > 0$

$$C \left| B_+(0,\varepsilon) \right|^{\frac{\alpha}{m+\gamma}-1} \int_{B_+(0,\varepsilon)} T^y \left| f(x) \right| y_m^{\gamma} dy \le I_B^{\alpha} f(x) \quad \forall x \in R_m^+ .$$

Таким образом нами доказана, что для любой функции $f \in L_{1,\gamma}^{loc}(R_m^+)$

$$M_B^{\alpha} f(x) \le C I_B^{\alpha} \left| f(x) \right| , \qquad x \in R_m^+ \tag{2}$$

где С не зависит от f.

Лемма доказана.

В дальнейшем для упрощения записи, под M_B^o будем понимать M_B. Основным результатом работы является следующая

Теорема . Пусть $1 < p \le q < \infty$, $\alpha = (m+\nu)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$,

$k \in \{1, 2, ..., m\}$ и (ω, ω_1) пара положительных функций. Если 1) $\sup\limits_{t<\tau\le 8t} \omega_1(\tau) \le c \inf\limits_{t<\tau\le 8t} \omega(\tau)$, t>0, 2)

$$L = \sup_{t>0} \left(\int_t^{\infty} \left[\xi^{-\frac{a_k+1}{p'}} \omega_1(\xi) \right]^q \frac{d\xi}{\xi} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^t \left[\xi^{-\frac{a_k+1}{p'}} \omega(\xi) \right]^{-p'} \frac{d\xi}{\xi} \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty ,$$

$$L^* = \sup_{t>0} \left(\int_0^t \left[\xi^{\frac{a_k+1}{q}} \omega_1(\xi) \right]^q \frac{d\xi}{\xi} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_t^{\infty} \left[\xi^{\frac{a_k+1}{q}} \omega(\xi) \right]^{-p'} \frac{d\xi}{\xi} \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty ,$$

то для любой функции $u \in L_{p,\nu}\left(\omega\left(\left|x_k\right|\right), R_m^+\right)$, $M_B^\alpha f(x)$ существует для почти всех $x \in R_m^+$ и существует не зависящее от $u(x)$ постоянное $C > 0$, такое что

$$\left(\int_{R_m^+}\left|M_B^\alpha u(x)\omega_1\left(\left|x_k\right|\right)\right|^q x_m^\gamma dx\right)^{1/q} \le$$

$$C\left(\int_{R_m^+}\left|u(x)\omega\left(\left|x_k\right|\right)\right|^p x_m^\gamma dx\right)^{1/p}.$$

Доказательство. Положим

$$I_{k,n} = \left\{R_m^+ : 2^n < \left|x_k\right| \le 2^{n+1}\right\}.$$

Применяя неравенство Минковского, получаем

$$\left(\int_{R_m^+}\left|M_B^\alpha u(x)\omega_1\left(\left|x_k\right|\right)\right|^q x_m^\gamma dx\right)^{1/q} \le$$

$$\left(\sum_{m\in Z}\int_{I_{k,n}}\left|M_B^\alpha u(x)\omega_1\left(\left|x_k\right|\right)\right|^q x_m^\gamma dx\right)^{1/q} \le$$

$$\le\left(\sum_{m\in Z}\int_{I_{k,n}}\left|M_B^\alpha\left(u(y)\chi_{[0,2^{n-1}]}\left(\left|y_k\right|\right)\right)(x)\omega_1\left(\left|x_k\right|\right)\right|^q x_m^\gamma dx\right)^{1/q}+$$

$$+\left(\sum_{m\in Z}\int_{I_{k,n}}\left|M_B^\alpha\left(u(y)x_{[2^{n-1},2^{n+2}]}\left(\left|y_k\right|\right)\right)(x)\omega_1\left(\left|x_k\right|\right)\right|^q x_m^\gamma dx\right)^{1/q}+$$

$$+\left(\sum_{m\in Z}\int_{I_{k,n}}\left|M_B^{\alpha}\left(u(y)\chi_{(2^{n+2},\infty)}\left(\left|y_k\right|\right)\right)(x)\omega_1\left(\left|x_k\right|\right)\right|^q x_m^{\gamma}dx\right)^{1/q}=$$

$$A_1+A_2+A_3$$

Оценим сверху A_1, A_2, A_3.

Обозначим

$u_{k,n}(y)=\left|u(y)\right|\chi_{[0,2^{n-1}]}\left(\left|y_k\right|\right), u_{k,n}^{*}(y)=\left|u(y)\right|\chi_{[2^{n+2},+\infty)}\left(\left|y_k\right|\right)$ где $\chi_E(r)$ характеристическая функция множества Е. С учетом неравенств (I) и (II) получаем

$$A_1\le C\left(\sum_{n\in Z}\int_{I_{k,n}}\omega_1^q(x)\left(\int_{\left\{y\in R_m^+:\left|y_k\right|\le 2^{n-1}\right\}}\frac{u_{k,n}(y)y_m^{\gamma}dy}{\left(\left|\hat{x}_k-\hat{y}_k\right|+\left|x_k\right|\right)^{\beta}}\right)^q x_m^{\gamma}dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$A_3\le c\left(\sum_{n\in Z}\int_{I_{k,n}}\omega_1^q\left(\left|x_k\right|\right)\left(\int_{\left\{y\in R_m^+:\left|y_k\right|\ge 2^{n+2}\right\}}\frac{u_{k,n}^{*}(y)y_m^{\gamma}dy}{\left(\left|\hat{x}_k-\hat{y}_k\right|+\left|y_k\right|\right)^{\beta}}\right)^q x_m^{\gamma}dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

Здесь $\hat{x}_k=(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_m)$, $\hat{y}_k=(y_1,\ldots,y_{k-1},y_{k+1},\ldots,y_m)$,

$\beta=(m+2\nu)\big/r$, $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{p'}+\dfrac{1}{q}$, $p'=\dfrac{p}{p-1}$.

С помощью рассуждений проведенных в работах [4], [5] доказывается, что

$$A_i\le C\left(\int_{R_m^+}\left|\omega\left(\left|y_k\right|\right)u(y)\right|^p x_m^{\gamma}dx\right)^{\frac{1}{p}},\ i=1,3.$$

С учетом вышеприведенных лемм и условия 1) теоремы, также имеем

$$A_2\le\left(\sum_{n\in Z}\left(\sup_{2^n\le\left|x_k\right|\le 2^{n+1}}\omega_1\left(\left|x_k\right|\right)\right)^q\int_{\left\{x\in R_m^+:2^{n-1}<\left|x_k\right|\le 2^{n+2}\right\}}\left|M_B^{\alpha}u(x)\right|^q x_m^{\gamma}dx\right)^{\frac{1}{q}}\le$$

$$\le C\left(\sum_{n\in Z}\left(\int_{\left\{x\in R_m^+ : 2^{n-1}<|x_k|\le 2^{n+2}\right\}}\left(\left|\left(u(x)\right)\omega\left(\left|x_k\right|\right)\right|\right)^p x_m^{\gamma}dx\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le C\left(\int_{R_m^+}\left|\omega\left(\left|x_k\right|\right)u(x)\right|^p x_m^{\gamma}dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Этим теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1.Левитан Б.М.// Успехи матем.наук, 6, №2 (1951), стр.102-143.
2.K.Stempak, Studia Math.100(2),1991, p.129-147.
3.И.Стейн, Г.Вейс //Введение в гармонический анализ на эвклидовых пространствах. Изд. «Мир», Москва, 1974.
4.Абдуллаев С.К., Карамалиев Н.Р.// Вестник Бакинского Университета, сер. физ.мат.наук, 2005, №1.
5.Абдуллаев С.К., Карамалиев Н.Р.// Вестник Бакинского Университета, сер. физ.мат.наук, 2005, №2.

ÜMUMİLƏŞMİŞ SÜRÜŞMƏ İLƏ BAĞLI MAKSİMAL VƏ KƏSR MAKSİMAL FUNKSİYALAR ÜÇÜN ÇƏKİLİ BƏRABƏRSİZLİKLƏR

N.R.KƏRƏMƏLİYEV

XÜLASƏ

İşdə Laplas–Bessel diferensial operatoru ilə bağlı ümumiləşmiş sürüşmənin doğurduğu maksimal və kəsr maksimal funksiyalar üçün ikiçəkili qiymətləndirmələr alınmışdır.

WEIGHTED ESTIMATIONS OF MAXIMAL AND FRACTIONALLY MAXIMAL FUNCTIONS ASSOCIATED BY GENERALIZED SHIFT

N.R.KARAMALIYEV

SUMMARY

In this work, two-weighted estimations for maximal and fractionally maximal functions generated by the generalized shift, associated by a differential operator of Laplas - Bessel are established.